

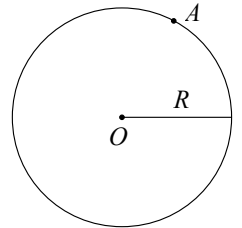
Chương 5. ĐƯỜNG TRÒN

Bài 13. Mở đầu về đường tròn.

A. LÝ THUYẾT.

1) Đường tròn.

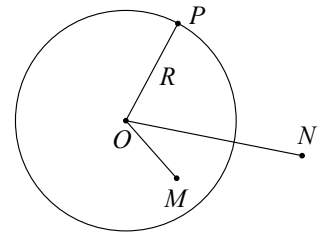
- ♣ Đường tròn tâm O bán kính R ($R > 0$), kí hiệu là $(O; R)$ là hình gồm tất cả các điểm cách O một khoảng bằng R . (Hình 1)
- ♣ Khi không cần quan tâm tới bán kính, ta kí hiệu đường tròn tâm O là (O)
- ♣ Nếu A là một điểm của đường tròn (O) , ta viết $A \in (O)$, ta còn nói đường tròn (O) đi qua điểm A hay điểm A nằm trên đường tròn (O) .



Hình 1

Ví dụ 1: Cho đường tròn $(O; R)$ và ba điểm M, N, P như Hình 2.

- a) Hãy cho biết điểm nào thuộc đường tròn, điểm nào nằm trong, điểm nào nằm ngoài?
- b) Hãy so sánh OP, OM, ON với R



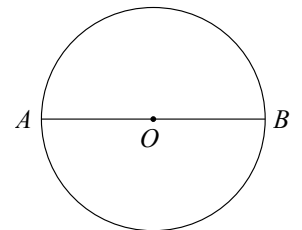
Hình 2

Bài làm:

- a) Điểm P thuộc đường tròn (O) , điểm M nằm trong đường tròn (O) . Điểm N nằm ngoài đường tròn (O) .
- b) Ta có $OP = R, OM < R, ON > R$.

Chú ý:

- ♣ Hình tròn tâm O bán kính R là hình gồm các điểm nằm trên và nằm trong đường tròn $(O; R)$.
- ♣ Hình 3. AB được gọi là đường kính của đường tròn (O)



Hình 3

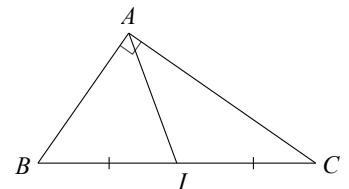
Ví dụ 2: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , chứng minh rằng điểm A thuộc đường tròn đường kính BC .

Bài làm:

Lấy I là trung điểm của BC

$\triangle ABC$ vuông tại A có AI là trung tuyến nên $AI = \frac{BC}{2} = BI = CI$

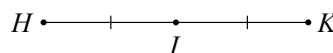
Vậy A thuộc đường tròn đường kính BC .



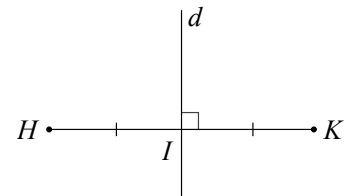
Hình 4

2) Tính đối xứng của đường tròn.

- ♣ Đối xứng tâm: Hai điểm H và K gọi là đối xứng với nhau qua điểm I nếu I là trung điểm của HK . Điểm I gọi là tâm đối xứng (Hình 5)
- ♣ Đối xứng trục: Hai điểm H và K gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu d là đường trung trực của HK . Đường thẳng d gọi là trục đối xứng (Hình 6)



Hình 5



Hình 6

- ♣ Đường tròn là hình có tâm đối xứng, tâm của đường tròn là tâm đối xứng của nó.
- ♣ Đường tròn là hình có trục đối xứng, mỗi đường thẳng đi qua tâm của đường tròn là một trục đối xứng của nó.

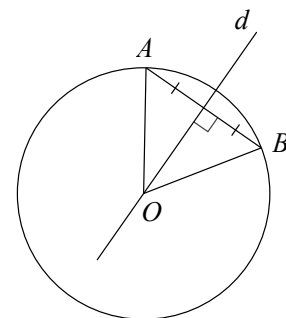
Ví dụ 3: Cho đường tròn (O) và hai điểm $A, B \in (O)$. Gọi d là đường trung trực của đoạn AB . Chứng minh rằng (d) là một trục đối xứng của (O) .

Bài làm:

Ta có $OA = OB = R$ nên O thuộc đường trung trực của AB

Mà d là đường trung trực của AB nên $O \in (d)$

Hay d đi qua O nên d là một trục đối xứng của (O)



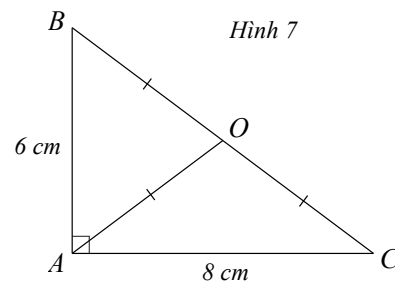
Hình 7

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 6\text{ cm}$, $AC = 8\text{ cm}$.

Chứng minh rằng ba điểm A, B, C cùng thuộc một đường tròn.

Tính bán kính của đường tròn đó.

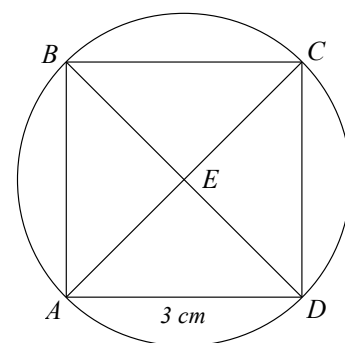


Bài 2: Cho hình vuông $ABCD$ có E là giao điểm của hai đường chéo.

a) Chứng minh rằng có một đường tròn đi qua bốn điểm A, B, C, D .

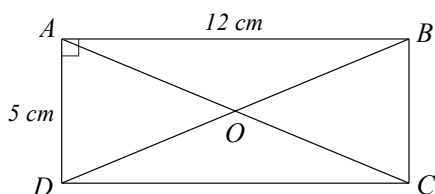
Xác định tâm đối xứng và hai trục đối xứng của đường tròn đó.

b) Tính bán kính của đường tròn đó nếu hình vuông có cạnh bằng 3 cm .



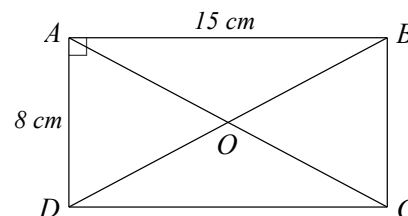
Bài 3: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 12\text{ cm}$, $BC = 5\text{ cm}$.

Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.



Bài 4: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8\text{ cm}$, $BC = 15\text{ cm}$.

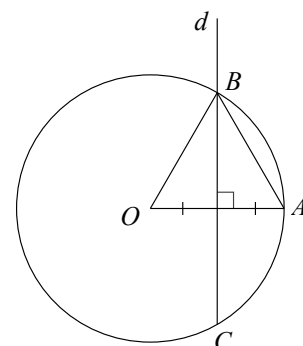
Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.



Bài 5: Cho đường tròn $(O; 3\text{ cm})$. Điểm $A \in (O)$. Đường thẳng d vuông góc với OA tại trung điểm của OA cắt đường tròn (O) tại B và C .

a) Chứng minh rằng $\triangle OAB$ là tam giác đều.

b) Tính độ dài đoạn BC .

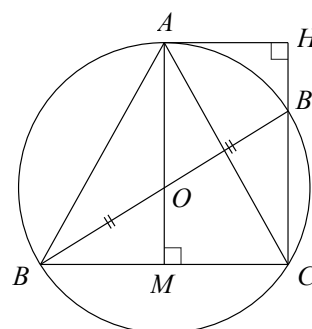


Bài 6: Cho đường tròn (O) và ba điểm A, B, C thuộc đường tròn đó sao cho $\triangle ABC$ cân tại A .

a) Giả sử $BC = 6\text{ cm}$, đường cao AM của $\triangle ABC$ bằng 4 cm . Tính AB .

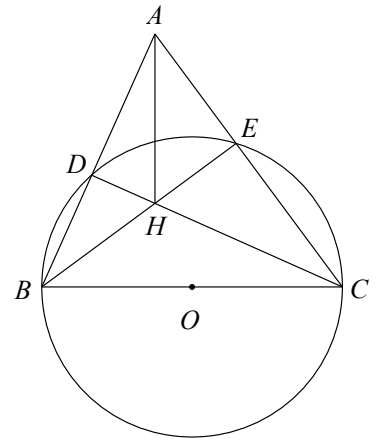
b) Gọi B' là điểm đối xứng với B qua O .

Vẽ $AH \perp CB'$ tại H . Tứ giác $AHCM$ là hình gì?



Bài 7: Cho $\triangle ABC$ nhọn. Vẽ đường tròn (O) đường kính BC , đường tròn này cắt AB, AC lần lượt tại D và E . Gọi H là giao điểm của BE và CD .

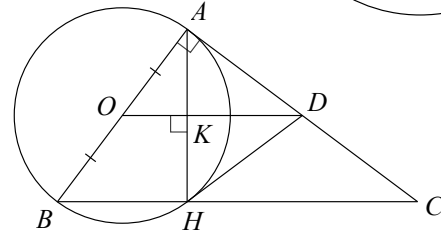
- Chứng minh rằng $CD \perp AB$ và $BE \perp AC$.
- Chứng minh rằng $AH \perp BC$.



Bài 8: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 6 \text{ cm}$, $AC = 8 \text{ cm}$.

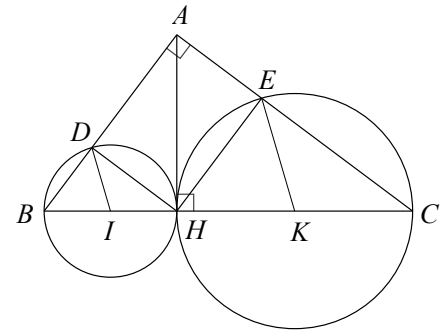
Vẽ đường tròn (O) đường kính AB cắt BC tại H .

- Tính AH và CH .
- Kẻ $OK \perp AH$ tại K , tia OK cắt AC tại D . Chứng minh rằng $DH \perp OH$.



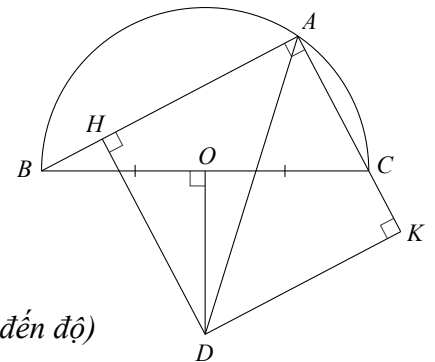
Bài 9: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Vẽ đường tròn (I) đường kính BH cắt AB tại D , vẽ đường tròn (K) đường kính HC cắt AC tại E .

- Chứng minh $ADHE$ là hình chữ nhật.
- Chứng minh rằng $AD \cdot AB = AE \cdot AC$.
- Giả sử $AB = 3 \text{ cm}$, $BC = 5 \text{ cm}$. Tính DE và diện tích tứ giác $DEKI$.



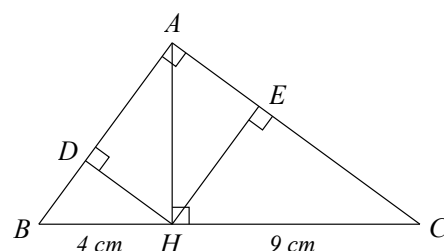
Bài 10: Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính BC . A là một điểm thay đổi trên đường tròn sao cho $AB > AC$. Tia phân giác $\widehat{BAC}$ cắt đường trung trực BC tại D . Hạ DH và DK lần lượt vuông góc với AB và AC .

- Chứng minh rằng $AHDK$ là hình vuông.
- Chứng minh A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.



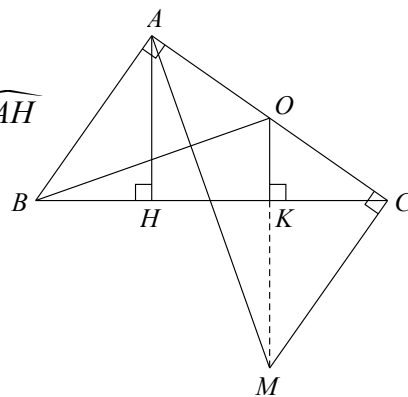
Bài 11: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB < AC$, đường cao AH

- Cho $HB = 4 \text{ cm}$, $HC = 9 \text{ cm}$. Tính AH và số đo $\widehat{ABC}$ (làm tròn đến độ).
- Gọi D là hình chiếu của H trên AB , E là hình chiếu của H trên AC . Chứng minh rằng:
 - Tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật.
 - $AD \cdot AB + AE \cdot AC = 2 \cdot DE^2$
 - $\frac{HC^2}{AC^2} + \frac{BD^2}{BH^2} = 1$.



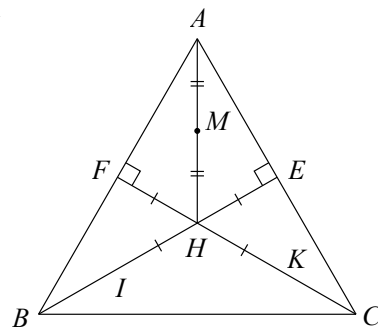
Bài 12: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH .

- Biết $AB = 5\text{ cm}$, $BC = 13\text{ cm}$. Tính độ dài cạnh AH và số đo góc $\widehat{BAH}$
- Gọi O là trung điểm của AC , K là hình chiếu của O trên BC .
Chứng minh 4 điểm A, B, O, K cùng nằm trên một đường tròn.
- Đường thẳng qua A và vuông góc với BO cắt đường thẳng qua C vuông góc với AC tại M . Chứng minh $\triangle ABO \sim \triangle CAM$ và ba điểm O, K, M thẳng hàng



Bài 13: Cho $\triangle ABC$ cân tại A , vẽ hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H .

- Chứng minh rằng bốn điểm B, F, E, C cùng thuộc một đường tròn và chỉ ra tâm của đường tròn đó.
- Gọi I, K lần lượt là hai điểm trên BH và CH sao cho $HE = HI$, $HF = HK$. Chứng minh rằng bốn điểm E, F, I, K cùng thuộc một đường tròn.
- Gọi M là trung điểm của AH . Tìm điều kiện của $\triangle ABC$ để điểm M thuộc đường tròn đi qua bốn điểm E, F, I, K .



Bài 2. Cung và dây của một đường tròn.

A. LÝ THUYẾT.

1) Dây và đường kính của đường tròn.

- ♣ Đoạn thẳng nối hai điểm tùy ý của một đường tròn gọi là một dây (*dây cung*) của đường tròn.
- ♣ Mỗi dây đi qua tâm là một đường kính của đường tròn.

Ví dụ 1: Hình 1.

MN là một dây của đường tròn (O)

AB là một đường kính của đường tròn (O) .

- ♣ Trong một đường tròn, đường kính là dây cung lớn nhất.

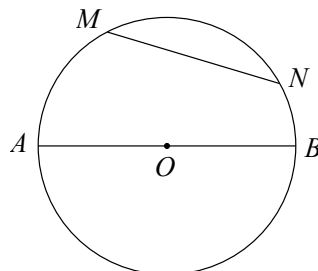
Ví dụ 2: Cho đường tròn đường kính BC . Chứng minh rằng với điểm A bất kì (khác B và C) nằm trên đường tròn thì $BC < AB + AC < 2BC$ (Hình 2)

Bài làm:

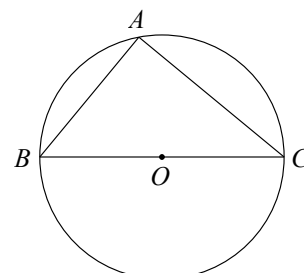
$\triangle ABC$ có $AB + AC > BC$

Mặt khác $AB < BC, AC < BC \Rightarrow AB + AC < 2BC$

Như vậy $BC < AB + AC < 2BC$



Hình 1



Hình 2

2) Góc ở tâm, cung và số đo của một cung.

- ♣ Hai điểm A và B cùng thuộc một đường tròn, hai điểm ấy chia đường tròn thành hai phần, mỗi phần là một cung tròn (*hay cung*). Hai điểm A, B gọi là hai đầu mút của mỗi cung.
- ♣ Góc ở tâm là góc có đỉnh trùng với tâm của đường tròn.

Ví dụ 3: Hình 3:

Hai cung là cung nhỏ $\widehat{AmB}$ và cung lớn $\widehat{AnB}$.

Một góc ở tâm là $\widehat{AOB} = \alpha$.

Chú ý:

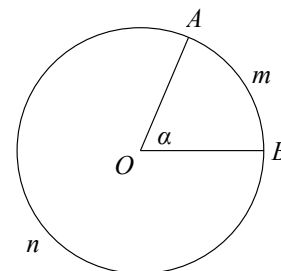
- ♣ Cung nhỏ $\widehat{AmB}$ còn có thể kí hiệu là $\widehat{AB}$. Khi $\widehat{AOB}$ là góc bẹt thì cung $\widehat{AB}$ còn gọi là một nửa đường tròn.
- ♣ Ta còn nói $\widehat{AOB}$ chắn cung AB hay cung AB bị chắn bởi góc $\widehat{AOB}$.

Ví dụ 4: Cho Hình 4.

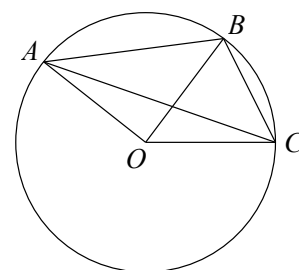
- a) Chỉ ra các cung có trong hình.
- b) Chỉ ra các góc ở tâm có trong hình.

Bài làm:

- a) Ta có các cung nhỏ là $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{AC}$
Và các cung lớn là $\widehat{AC}, \widehat{ACB}, \widehat{BAC}$
- b) Các góc ở tâm là $\widehat{AOB}, \widehat{BOC}, \widehat{AOC}$.



Hình 3



Hình 4

- ♣ Số đo của nửa đường tròn bằng 180^0 .
- ♣ Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.
- ♣ Số đo của cung lớn bằng hiệu 360^0 với số đo cung nhỏ có chung hai mút.
- ♣ Kí hiệu số đo cung AB là $sđ \widehat{AB}$
- ♣ Cung có số đo n^0 còn gọi là cung n^0 . Cả đường tròn được coi là cung 360^0 , một điểm là cung 0^0
- ♣ Hai cung trên một đường tròn gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng số đo.

Ví dụ 5: Cho Hình 5.

Ta có $sđ \widehat{AC} = sđ \widehat{AB} + sđ \widehat{BC}$.

Ví dụ 6: Cho điểm C nằm trên đường tròn (O) . Đường trung trực của đoạn

OC cắt (O) tại A và B . Tính số đo của các cung $\widehat{ACB}$ và $\widehat{ABC}$.

Bài làm:

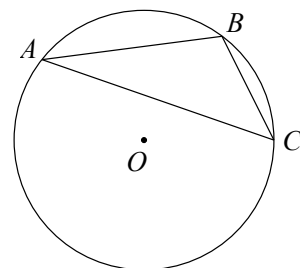
Gọi $AB \perp OC$ tại I

$$\text{Khi đó } OI = \frac{OC}{2} = \frac{R}{2}$$

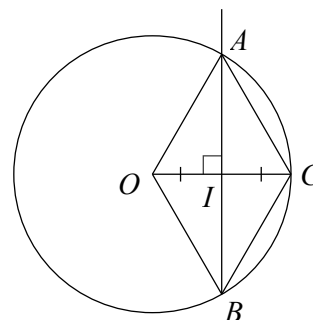
$$\cos \widehat{AOI} = \frac{OI}{OA} = \frac{R}{2 \cdot R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AOI} = 60^\circ$$

$$\text{Chỉ ra } \Rightarrow \widehat{AOB} = 2 \cdot \widehat{AOI} = 120^\circ \Rightarrow sđ \widehat{ACB} = \widehat{AOB} = 120^\circ$$

$$sđ \widehat{ABC} = 360^\circ - sđ \widehat{AC} = 360^\circ - \widehat{AOC} = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ.$$



Hình 5



Hình 6

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

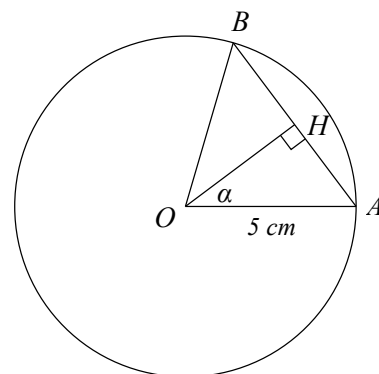
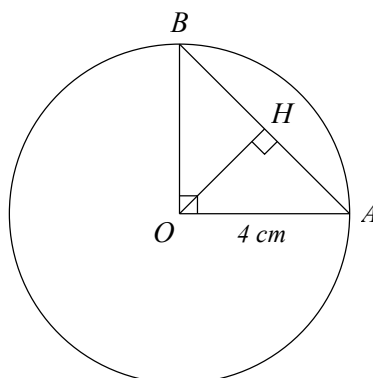
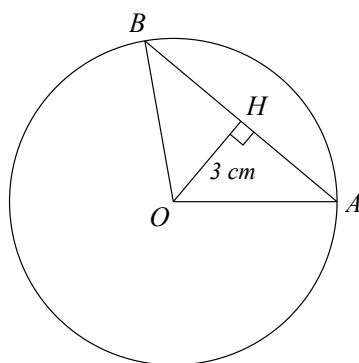
Bài 1: Cho đường tròn $(O; 5 \text{ cm})$ và AB là một dây bất kì của đường tròn đó. Biết $AB = 6 \text{ cm}$.

- Tính khoảng cách từ O đến dây AB .
- Tính $\tan \alpha$ nếu góc ở tâm chắn cung AB bằng 2α .

Bài 2: Tâm O của một đường tròn cách dây AB của nó một khoảng 3 cm .

Tính bán kính của đường tròn (O) , biết rằng cung nhỏ AB có số đo 100°

(làm tròn đến kết hàng phần mười)



Bài 3: Cho đường tròn $(O; 4 \text{ cm})$ và dây AB . Biết rằng $sđ \widehat{AB} = 90^\circ$.

- Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB .
- Tính độ dài dây AB .

Bài 4: Cho đường tròn (O) đường kính BC , điểm A nằm trên

đường tròn sao cho $\widehat{AOC} = 120^\circ$.

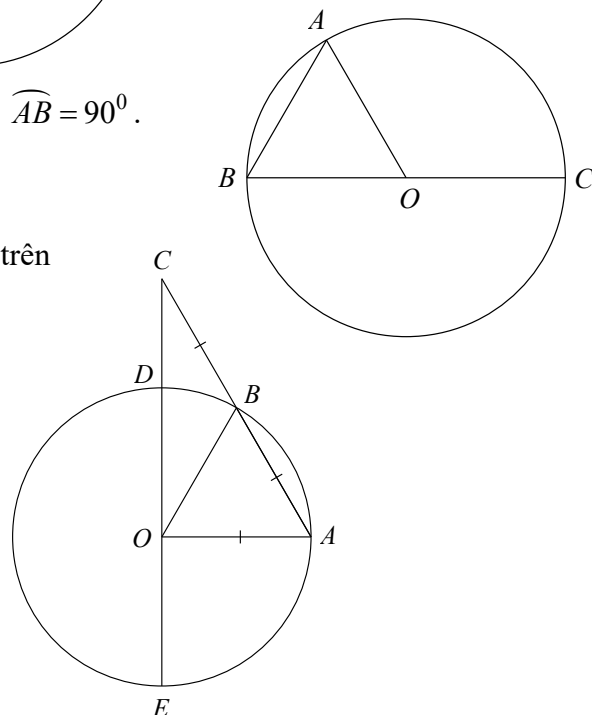
- Chứng minh rằng dây AB bằng bán kính.
- Tính $sđ \widehat{AB}$.

Bài 5: Cho đường tròn $(O; R)$ và dây $AB = R$.

Trên tia đối của tia BA lấy điểm C sao cho $BC = R$.

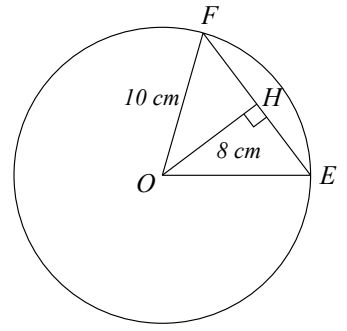
Kéo dài CO cắt (O) lần lượt tại D và E .

- Chứng minh rằng $\widehat{AOD} = 3 \cdot \widehat{ACD}$
- Tính $sđ \widehat{BE}$, $\widehat{AD}$.



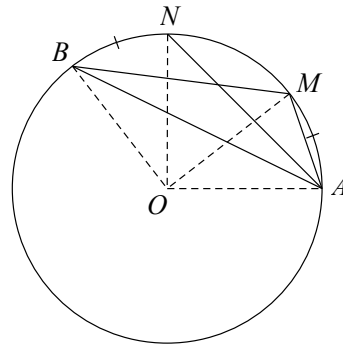
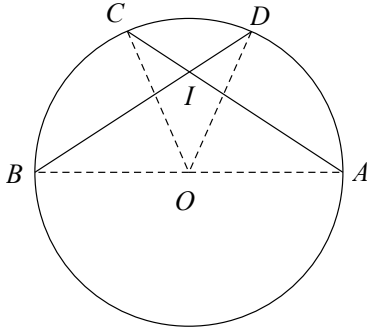
Bài 6: Cho đường tròn $(O; 10\text{ cm})$ có dây EF , biết khoảng cách từ tâm O tới dây EF bằng 8 cm .

- Tính độ dài dây EF .
- Tính số $\widehat{EF}$



Bài 7: Cho đường tròn (O) , dây AC bằng dây BD cắt nhau tại I .
(D nằm giữa A và C)

- Chứng minh rằng số $\widehat{AC} = \widehat{BD}$
- Chứng minh rằng số $\widehat{AB} = \widehat{CD}$



Bài 8: Cho đường tròn (O) , dây AB . Trên cung nhỏ AB lấy hai điểm M, N sao cho $AM = BN$ (M nằm trên cung AN).

- Chứng minh rằng số $\widehat{AN} = \widehat{BM}$
- Chứng minh rằng hai dây AN, BM bằng nhau.

Bài 15. Độ dài cung tròn, diện tích hình quạt tròn và hình vành khuyên.

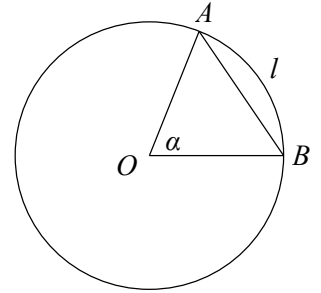
A. LÝ THUYẾT.

1) Độ dài của cung tròn.

- ♣ Cho đường tròn $(O; R)$, dây AB và $\widehat{AOB} = \alpha$.

Chu vi của cả đường tròn (O) là $C = 2\pi R$.

Độ dài cung tròn AB là $l = \frac{\alpha}{180} \cdot \pi R$



Hình 1

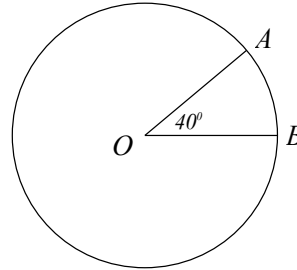
Ví dụ 1: Tính độ dài của cung 40° của một đường tròn có bán kính 9 cm .

Bài làm:

Gọi độ dài cung AB có số đo 40° như Hình 2

Độ dài cung tròn AB là

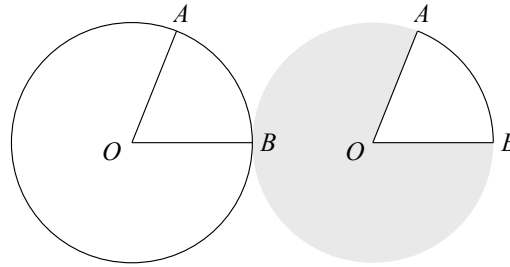
$$l = \frac{\alpha}{180} \cdot \pi R = \frac{40}{180} \cdot 3,14 \cdot 9 \approx 6,28\text{ cm}$$



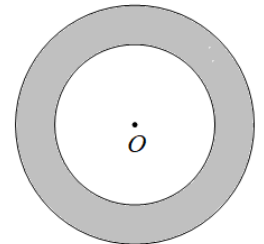
Hình 2

2) Hình quạt tròn và hình vành khuyên.

- ♣ Hình quạt tròn là phần hình tròn giới hạn bởi cung tròn và hai bán kính đi qua hai đầu mút của cung đó (Hình 3)
- ♣ Hình vành khuyên (vành khăn) là phần nằm giữa hai đường tròn có cùng tâm và bán kính khác nhau (hai đường tròn đồng tâm) (Hình 4)



Hình 3



Hình 4

- ♣ Diện tích hình quạt tròn bán kính R ứng với cung n° là $S_n = \frac{n}{360} \pi R^2 = \frac{l \cdot R}{2}$
- ♣ Diện tích hình vành khuyên tạo bởi hai đường tròn đồng tâm có bán kính R và r là $S_V = \pi(R^2 - r^2)$

Ví dụ 2: Tính diện tích hình vành khuyên nằm giữa hai đường tròn đồng tâm có bán kính là 6 cm và 4 cm .

Bài làm:

Diện tích của hình vành khuyên là $S = \pi(R^2 - r^2) = \pi(6^2 - 4^2) = 20\pi\text{ cm}^2$.

Ví dụ 3: Tính diện tích của hình quạt tròn có bán kính 5 cm và có độ dài cung ứng với nó là $4\pi\text{ cm}$

Bài làm:

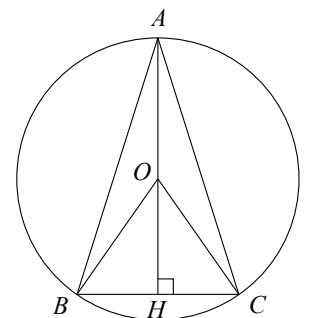
Diện tích hình quạt tròn là $S = \frac{l}{2} \cdot R = \frac{4\pi}{2} \cdot 5 = 10\pi(\text{cm}^2)$.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1: Cho đường tròn $(O; 4\text{ cm})$ và ba điểm A, B, C trên đường tròn đó

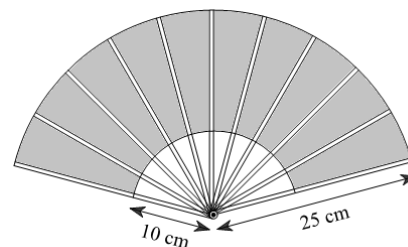
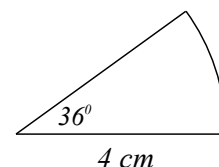
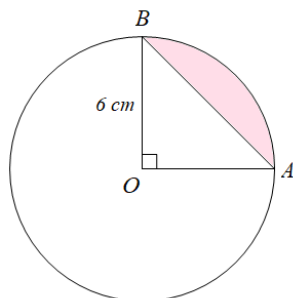
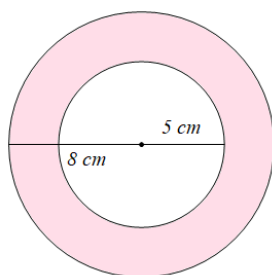
sao cho $\triangle ABC$ cân tại A và số đo cung nhỏ BC bằng 70° .

- Chứng minh rằng cung AB và cung AC bằng nhau.
- Tính độ dài cung BC, AB và AC (làm tròn đến hàng phần mười)



Bài 2: Tính diện tích của hình quạt tròn có bán kính 4 cm , ứng với cung 36°

Bài 3: Tính diện tích hình vành khuyên nằm giữa hai đường tròn đồng tâm có bán kính là 8 cm và 5 cm



Bài 4: Cho đường tròn $(O; 6\text{ cm})$, hai điểm A, B thuộc đường tròn sao cho $\widehat{AOB} = 90^\circ$.

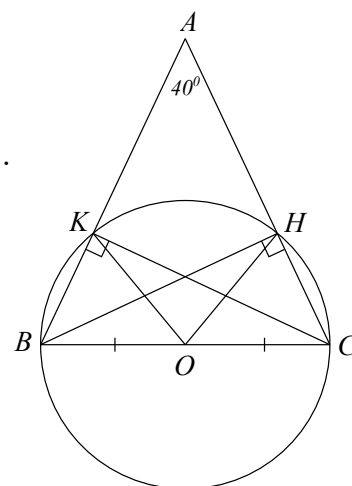
- Tính diện tích hình quạt tròn tạo bởi cung AB
- Tính diện tích hình viên phân (hình giới hạn bởi cung AB và dây AB) (Hình bên)

Bài 5: Một chiếc quạt giấy khi xòe ra có hình dạng của một hình quạt tròn với bán kính 25 cm và khi xòe hết thì góc tạo bởi hai thanh nan ngoài cùng của chiếc quạt là 150° .

- Tính chiều dài cung tròn của chiếc quạt.
- Tính diện tích phần giấy làm quạt, biết rằng phần giấy của quạt là một hình vành khuyên có bán kính đường tròn nhỏ là 10 cm .

Bài 6: Cho $\triangle ABC$ là tam giác nhọn cân tại A . Kẻ hai đường cao BH và CK .

- Chứng minh rằng đường tròn tâm O đường kính BC đi qua K và H .
- Chứng minh rằng cung BH và cung CK bằng nhau.
- Tính số đo của cung KH nếu $\widehat{BAC} = 40^\circ$.

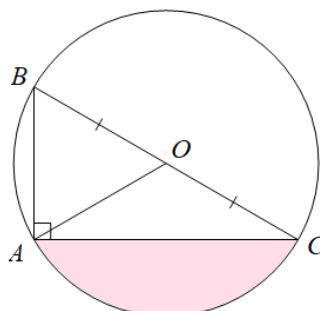
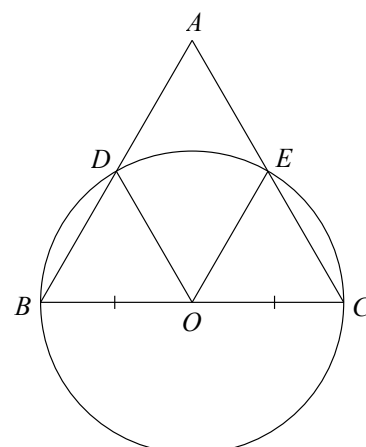


Bài 7: Cho $\triangle ABC$ đều có $AB = 2\sqrt{3}\text{ cm}$. Đường tròn đường kính BC cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại D và E .

- Chứng minh rằng ba cung BD, DE và EC bằng nhau. Tính số đo mỗi cung ấy.
- Tính diện tích phần viên phân giới hạn bởi dây CE và cung CE .

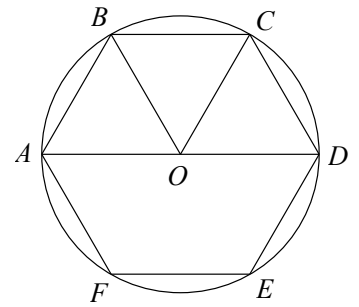
Bài 8: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 3\text{ cm}$, $BC = 6\text{ cm}$, đường tròn đường kính BC .

- Chứng minh rằng đỉnh A thuộc đường tròn.
- Tính diện tích hình quạt tròn tạo bởi cung AC và diện tích phần viên phân giới hạn bởi dây AC và cung AC .



Bài 9: Cho đường tròn $(O; 5\text{ cm})$ và hình lục giác đều $ABCDEF$ sao cho 6 đỉnh của hình lục giác đều đều thuộc đường tròn.

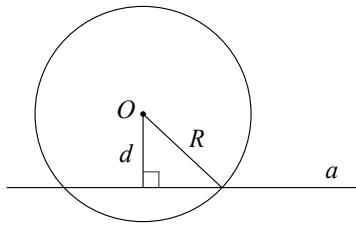
- Chứng minh rằng cung AC và cung BD bằng nhau.
- Tính diện tích hình quạt tròn tạo bởi cung BD và diện tích phần viên phân tạo bởi cung AC và dây AC



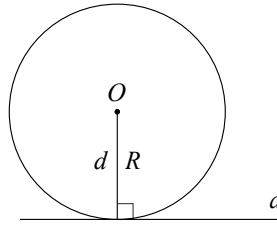
Bài 16. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn.

A. LÝ THUYẾT.

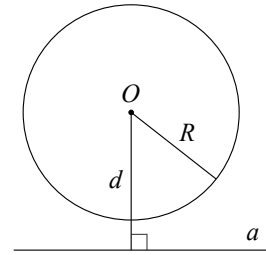
1) Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn.



Hình 1



Hình 2



Hình 3

- ♣ Đường thẳng a và đường tròn (O) gọi là cắt nhau nếu chúng có hai điểm chung (Hình 1)
- ♣ Đường thẳng a và đường tròn (O) gọi là tiếp xúc với nhau nếu chúng có duy nhất một điểm chung (Hình 2).
- ♣ Đường thẳng a và đường tròn (O) gọi là không giao nhau nếu chúng không có điểm chung (Hình 3).

Nhận xét:

- ♣ Nếu khoảng cách $d < R$ thì đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt.
- ♣ Nếu khoảng cách $d = R$ thì đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau.
- ♣ Nếu khoảng cách $d > R$ thì đường thẳng và đường tròn không giao nhau.

Ví dụ 1: Cho đường thẳng a và điểm O cách đường thẳng a một khoảng 5 cm . Khi đó đường tròn $(O; 4,9\text{ cm})$ như thế nào với đường thẳng a ?

Bài làm:

Nhận thấy $d > R$ ($5\text{ cm} > 4,9\text{ cm}$) nên đường thẳng a và đường tròn (O) không giao nhau.

Ví dụ 2: Cho điểm A cách đường thẳng d một khoảng 12 cm . Vẽ đường tròn $(A; 13\text{ cm})$

- a) Cho biết vị trí tương đối của đường thẳng d và đường tròn (A)
- b) Gọi hai giao điểm là B và C . Tính BC

Bài làm:

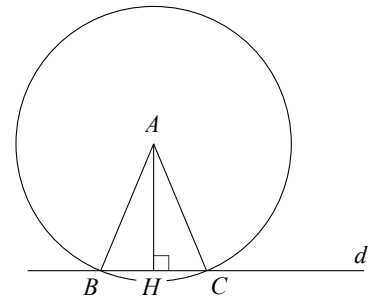
- a) Gọi AH là khoảng cách từ A tới đường thẳng d .

Vì $AH < R$ ($12\text{ cm} < 13\text{ cm}$) nên đường thẳng d cắt đường tròn (A) tại hai điểm phân biệt.

- b) $\triangle ABC$ có $AB = AC = R$ nên cân tại A , lại có AH là đường cao nên AH cũng là đường trung tuyến $\Rightarrow BH = CH$.

$$\triangle AHC \text{ vuông tại } H \text{ có } AC^2 = AH^2 + HC^2 \Rightarrow 13^2 = 12^2 + HC^2 \Rightarrow HC^2 = 25 \Rightarrow HC = 5\text{ cm}$$

Vì $HC > 0$. Do đó $BC = 2HC = 10\text{ cm}$.



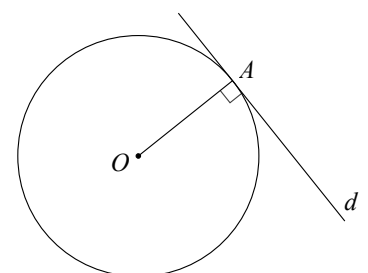
Hình 4

2) Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn.

- ♣ **Định lý 1:** Nếu một đường thẳng đi qua một điểm nằm trên một đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn. Điểm đó gọi là tiếp điểm.

Ví dụ 3: Hình 5.

Đường thẳng d vuông góc với bán kính OA nên d là một tiếp tuyến của đường tròn (O) và A gọi là tiếp điểm.



Hình 5

3) Hai tiếp tuyến cắt nhau của một đường tròn.

♣ **Định lý 2:** Nếu hai tiếp tuyến của đường tròn (O) cắt nhau tại điểm P thì:

- + Điểm P cách đều hai tiếp điểm.
- + PO là góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
- + OP là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính qua hai tiếp điểm.

Ví dụ 4: Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm ngoài đường tròn, từ A kẻ tiếp tuyến AB tới đường tròn (B là tiếp điểm). Kẻ dây BC vuông góc với AO tại H .

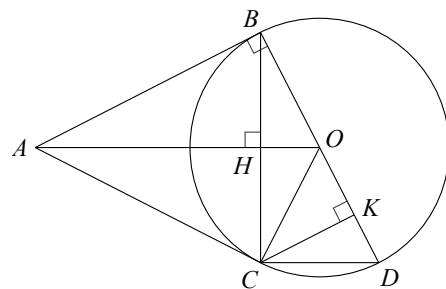
- a) Chứng minh rằng AC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- b) Kẻ đường kính BD của đường tròn (O) , kẻ $CK \perp BD$. Chứng minh rằng $BK \cdot BD = BC^2$

Bài làm:

- a) $\triangle OBC$ có $OB = OC = R$ nên $\triangle OBC$ cân tại O
 Có $OH \perp BC$ nên $HB = HC$.
 Do đó AO là trung trực của $BC \Rightarrow AB = AC$
 Chứng minh $\triangle ABO = \triangle ACO$ ($c - c - c$) $\Rightarrow \widehat{ACO} = 90^\circ$
 Vậy AC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

- b) $\triangle BCD$ có CO là đường trung tuyến, mà $CO = \frac{1}{2}BD$

Nên $\triangle BCD$ vuông tại C . Chứng minh $\triangle BKC \sim \triangle BCD$ ($g - g$) $\Rightarrow \frac{BK}{BC} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow BK \cdot BD = BC^2$.

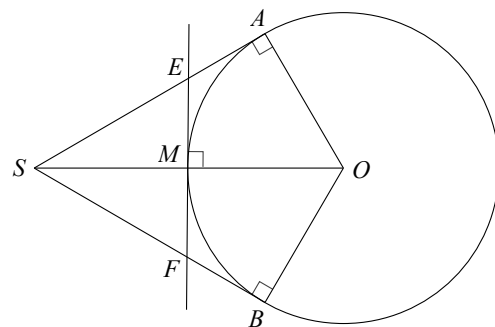


Hình 6

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

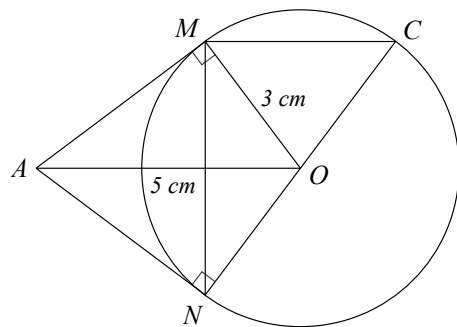
Bài 1: Cho SA, SB là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn (O) (A, B là hai tiếp điểm). Gọi M là một điểm tùy ý trên cung nhỏ AB . Tiếp tuyến của (O) tại M cắt SA tại E và cắt SB tại F .

- a) Chứng minh rằng chu vi của $\triangle SEF$ bằng $SA + SB$
- b) Giả sử M là giao điểm của đoạn SO với đường tròn (O) .
 Chứng minh $SE = SF$.



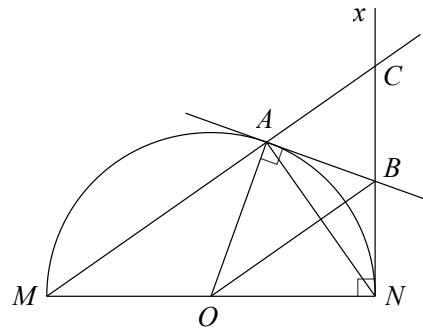
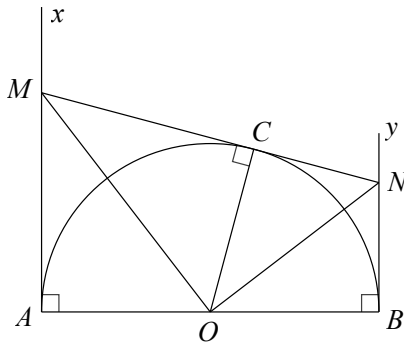
Bài 2: Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài đường tròn, kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm)

- a) Chứng minh rằng $OA \perp MN$
- b) Vẽ đường kính NOC . Chứng minh rằng $MC \parallel AO$.
- c) Giả sử $OM = 3 \text{ cm}$, $OA = 5 \text{ cm}$. Tính các cạnh của $\triangle AMN$.



Bài 3: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Về cùng phía với nửa đường tròn, vẽ hai tia Ax, By vuông góc với AB . Gọi M là một điểm bất kì thuộc tia Ax . Qua M kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt By tại N .

- Tính $\widehat{MON}$.
- Chứng minh rằng $MN = AM + BN$
- Chứng minh rằng $AM \cdot BN = R^2$

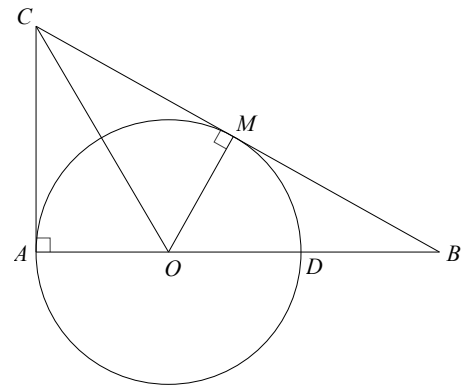
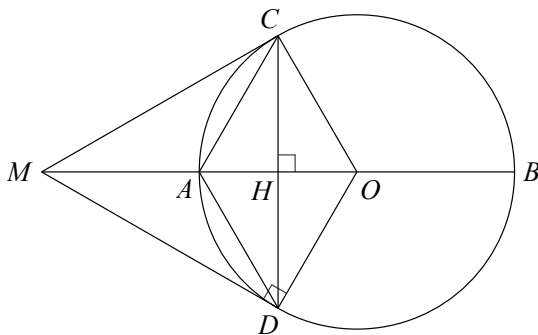


Bài 4: Cho nửa đường tròn (O) đường kính MN , tiếp tuyến Nx . Qua A trên nửa đường tròn (A không trùng với M, N) kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn cắt Nx ở B . Tia MA cắt Nx ở C .

- Chứng minh bốn điểm O, A, B, N cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh $OB \perp AN$
- Chứng minh B là trung điểm của NC .

Bài 5: Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi H là trung điểm của OA . Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt (O) tại C và D .

- Tứ giác $ACOD$ là hình gì?
- Qua D kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O) cắt OA tại M . Chứng minh MC là tiếp tuyến của (O) và $\triangle MCD$ đều.

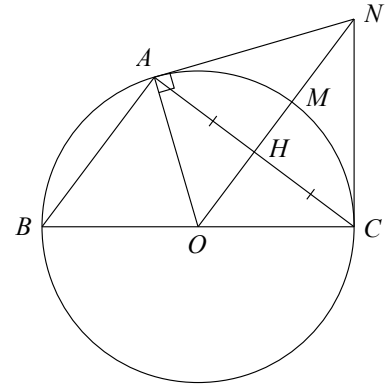
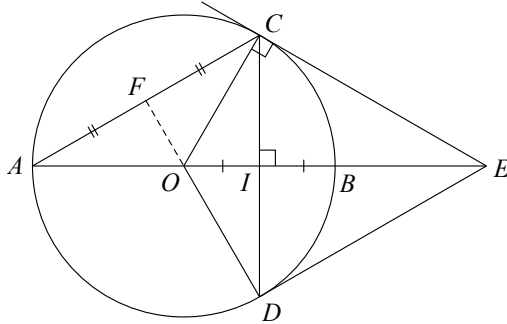


Bài 6: Cho đường tròn (O) đường kính AD . Vẽ tiếp tuyến tại A của đường tròn, từ C trên tiếp tuyến đó vẽ tiếp tuyến thứ hai CM của đường tròn (O) (M là tiếp điểm và M khác A) cắt AD tại B .

- Giả sử $AC = 6 \text{ cm}$, $AB = 8 \text{ cm}$. Tính BC và BM .
- Chứng minh rằng $BM \cdot AC = BA \cdot MO$.

Bài 7: Cho $(O; R)$ đường kính BC , lấy điểm $A \in (O)$. Gọi H là trung điểm của AC . Tia OH cắt (O) tại M . Từ A vẽ tiếp tuyến với (O) cắt tia OM tại N .

- Chứng minh rằng $OM \parallel AB$
- Chứng minh rằng CN là tiếp tuyến của (O) .

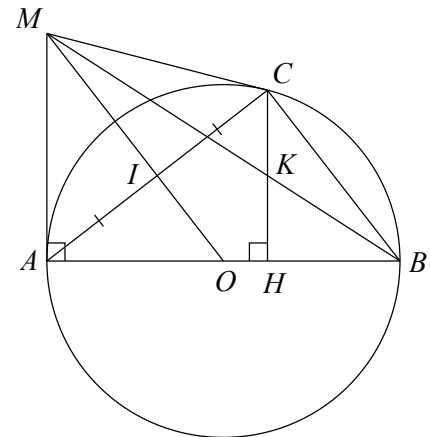
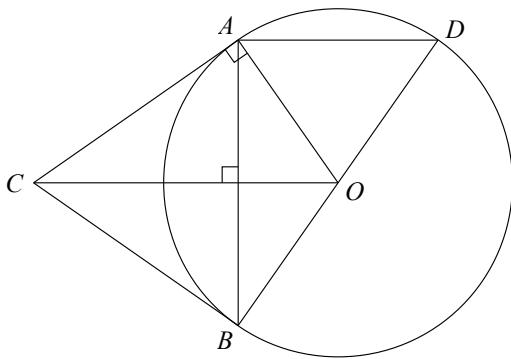


Bài 8: Cho đường tròn (O) đường kính AB . Gọi I là trung điểm của OB . Qua I kẻ dây CD vuông góc với OB . Tiếp tuyến của (O) tại C cắt AB tại E .

- Chứng minh $OI \cdot OE = R^2$
- Chứng minh ED là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- Gọi F là trung điểm của dây AC . Chứng minh D, O, F thẳng hàng.

Bài 9: Cho đường tròn (O) và dây AB . Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn tại C .

- Chứng minh CB là tiếp tuyến của đường tròn.
- Vẽ đường kính BOD . Chứng minh $AD \parallel OC$
- Cho biết bán kính của đường tròn là 15 cm , $AB = 24 \text{ cm}$. Tính OC

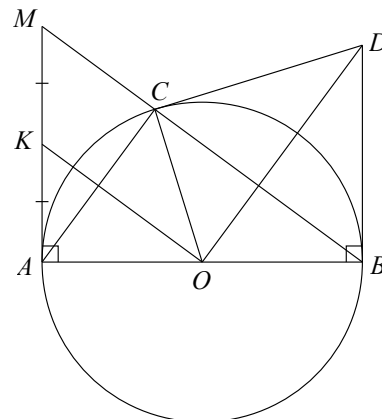
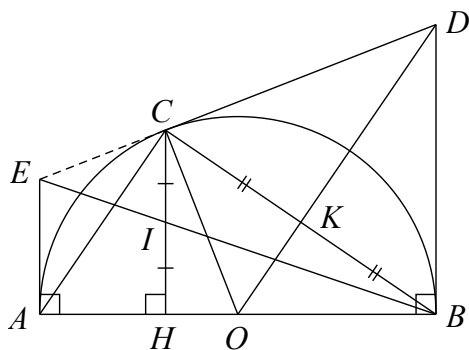


Bài 10: Cho đường tròn (O) đường kính AB và C là một điểm trên đường tròn (C khác A và B). Kẻ $CH \perp AB$. Gọi I là trung điểm của AC , OI cắt tiếp tuyến tại A của (O) tại M , MB cắt CH tại K .

- Chứng minh $OI \perp AC$ và $\triangle ABC$ vuông tại C .
- Chứng minh MC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- Chứng minh K là trung điểm của CH .

Bài 11: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Lấy điểm C nằm trên đường tròn (O) . Gọi K là trung điểm của dây cung BC . Qua B dựng tiếp tuyến với (O) cắt OK tại D .

- Chứng minh rằng $DO \perp BC$ và $\triangle ABC$ vuông
- Chứng minh DC là tiếp tuyến của đường tròn (O)
- Vẽ $CH \perp AB$ tại H . Gọi I là trung điểm của CH . Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BI tại E . Chứng minh E, C, D thẳng hàng.

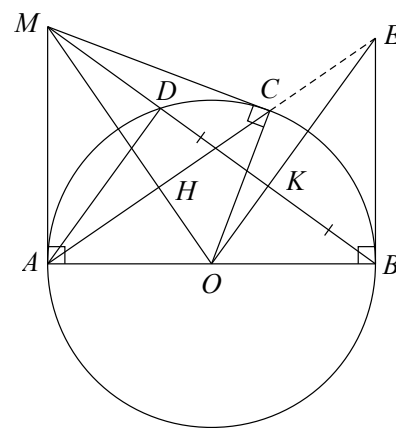
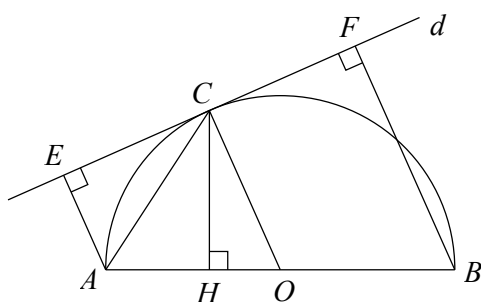


Bài 12: Cho đường tròn (O) đường kính AB . Lấy điểm C thuộc đường tròn (C khác A và B). Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BC tại M .

- Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông và $AB^2 = BC \cdot BM$
- Gọi K là trung điểm của MA . Chứng minh rằng KC là tiếp tuyến của đường tròn (O)
- KC cắt tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) tại D . Chứng minh rằng $\triangle KOD$ vuông.

Bài 13: Cho đường tròn (O) đường kính AB . Qua A vẽ tiếp tuyến Ax của đường tròn (O) . Trên Ax lấy điểm M (M khác A), từ M vẽ tiếp tuyến MC của đường tròn (C là tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OM và AC . Đường thẳng MB cắt đường tròn (O) tại D (D nằm giữa M và B)

- Chứng minh $OM \perp AC$ tại H .
- Chứng minh rằng $MD \cdot MB = MH \cdot MO$ và $\widehat{MHD} = \widehat{MBA}$
- Gọi K là trung điểm của BD . Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt OK tại E . Chứng minh A, E, C thẳng hàng.

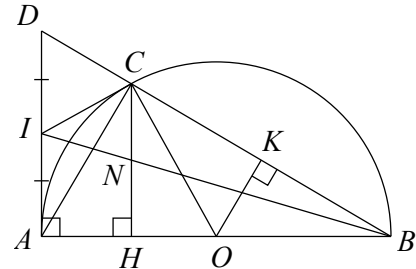
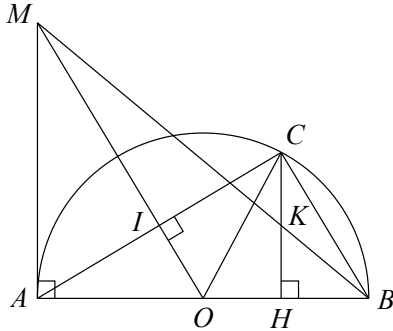


Bài 14: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Qua điểm C thuộc nửa đường tròn, kẻ tiếp tuyến d của đường tròn. Gọi E, F lần lượt là chân đường vuông góc từ A và B tới d . Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ C đến AB .

- Chứng minh rằng $CE = CF$.
- Chứng minh AC là tia phân giác $\widehat{BAE}$.
- Chứng minh rằng $CH^2 = AE \cdot BF$

Bài 15: Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB , C là điểm thuộc nửa đường tròn sao cho $AC > BC$ (C khác A và B). Kẻ $CH \perp AB$ và $OI \perp AC$.

- Chứng minh C, H, O, I cùng thuộc một đường tròn.
- Kẻ tiếp tuyến Ax của đường tròn. Tia OI cắt Ax tại M . Chứng minh $OI \cdot OM = R^2$
- Gọi giao điểm của BM với CH là K . Chứng minh $\triangle AMO \sim \triangle HCB$ và $CK = KH$

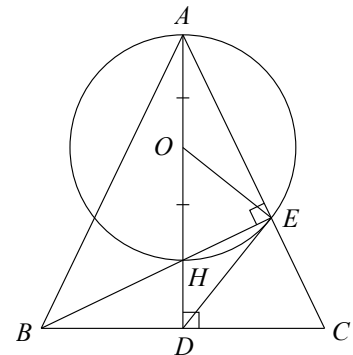
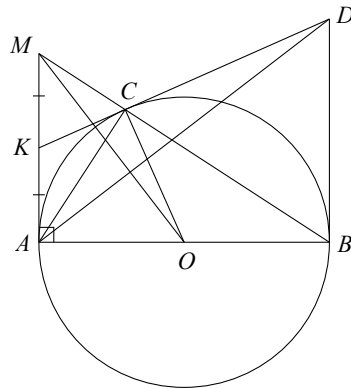


Bài 16: Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Trên nửa đường tròn lấy điểm C (C khác A và B). Kẻ $OK \perp BC$ tại K . Gọi D là giao điểm của BC với tiếp tuyến tại A của nửa đường tròn (O) và I là trung điểm của AD .

- Chứng minh $OK \parallel AC$ và $BC \cdot BD = 4R^2$
- Chứng minh IC là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O)
- Từ C kẻ $CH \perp AB$, BI cắt CH tại N . Chứng minh rằng N là trung điểm của CH .

Bài 17: Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB . Lấy C thuộc đường tròn (O) (C khác A và B). Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại M .

- Chứng minh $\triangle ABC$ vuông và $BC \cdot BM = 4R^2$
- Gọi K là trung điểm của MA . Chứng minh KC là tiếp tuyến của (O) .
- Tia KC cắt tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) tại D . Chứng minh $MO \perp AD$.

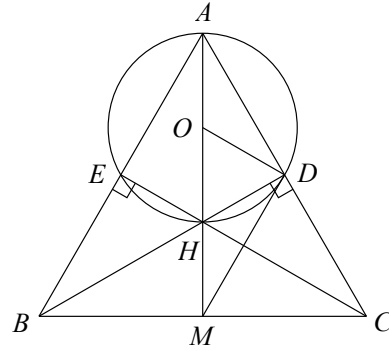
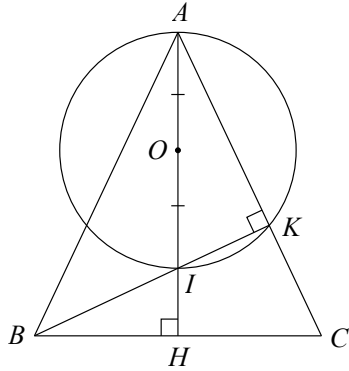


Bài 18: Cho $\triangle ABC$ cân tại A , các đường cao AD và BE cắt nhau tại H . Vẽ đường tròn (O) đường kính AH .

- Chứng minh E là điểm nằm trên đường tròn (O) .
- Chứng minh DE là tiếp tuyến của (O)

Bài 19: Cho $\triangle ABC$ cân tại A , đường cao AH và BK cắt nhau tại I .

- Chứng minh đường tròn đường kính AI đi qua K .
- Chứng minh HK là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AI .

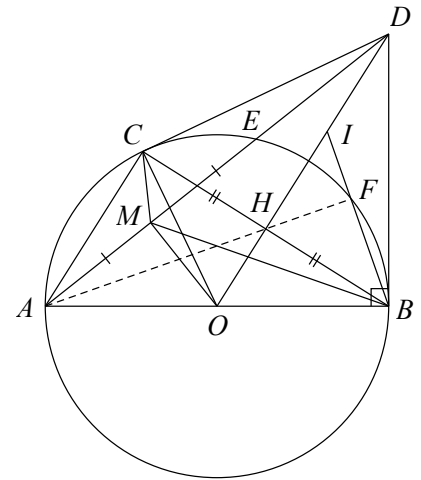
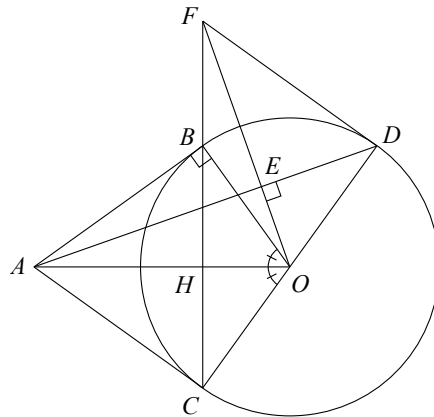


Bài 20: Cho $\triangle ABC$ đều, đường cao BD và CE cắt nhau tại H , AH cắt BC tại M .

- Chứng minh 4 điểm A, D, H, E cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh MD là tiếp tuyến của đường tròn đi qua bốn điểm A, D, H, E

Bài 21: Cho B, C là hai điểm trên đường tròn $(O; R)$. Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với OB cắt đường phân giác $\widehat{BOC}$ tại A . H là giao điểm của OA và BC .

- Chứng minh $\triangle BOH$ vuông và $OB^2 = OH.OA$
- Chứng minh AC là tiếp tuyến của $(O; R)$
- CD là đường kính của $(O; R)$. Qua O dựng đường thẳng vuông góc với AD tại E và cắt CB tại F . Chứng minh $\widehat{ODF} = 90^\circ$.

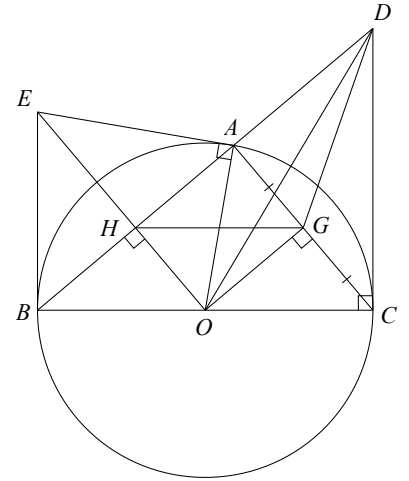
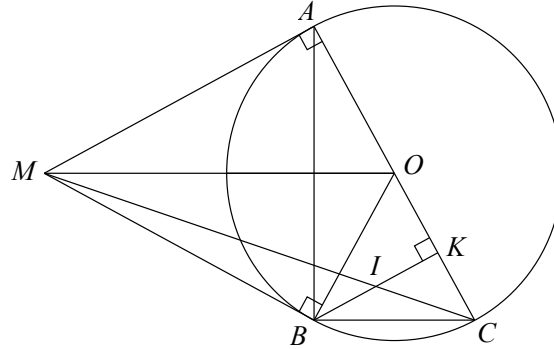


Bài 22: Cho điểm C thuộc đường tròn (O) đường kính AB sao cho $AC < BC$. Gọi H là trung điểm của BC . Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt OH tại D .

- Chứng minh $DH.DO = DB^2$
- Chứng minh DC là tiếp tuyến của đường tròn (O)
- Đường thẳng AD cắt (O) tại E . Gọi M là trung điểm của AE . Chứng minh D, B, M, C cùng thuộc một đường tròn.
- Gọi I là trung điểm của DH , BI cắt (O) tại F . Chứng minh A, H, F thẳng hàng.

Bài 23: Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O) có BC là đường kính. Gọi H và G lần lượt là hình chiếu của điểm O trên AB và AC . Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt OH tại E .

- 1) Chứng minh $OH \parallel AC$ và EB là tiếp tuyến của đường tròn (O)
- 2) Tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt AB tại D . Chứng minh:
 - a) $CD \cdot BC = 2 BD \cdot GC$
 - b) $\widehat{BOD} = \widehat{CGD}$

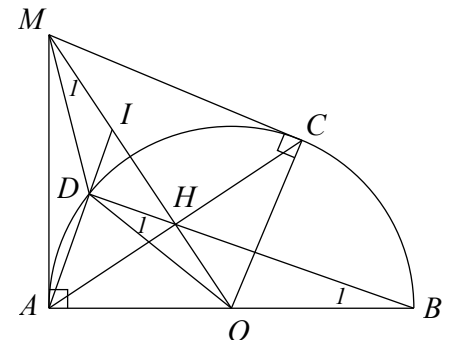


Bài 24: Cho $(O; R)$. Từ một điểm M ở bên ngoài đường tròn, kẻ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của MO và dây AB .

- a) Chứng minh 4 điểm M, A, O, B cùng nằm trên một đường tròn.
- b) Kẻ đường kính AC của (O) , vẽ BK vuông góc với AC ($K \in AC$). Chứng minh $MB \cdot BC = BK \cdot MO$
- c) MC cắt BK tại I . Chứng minh I là trung điểm của BK .

Bài 25: Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$. Trên nửa đường tròn lấy điểm C bất kì (C khác A và B). Tiếp tuyến tại C và tiếp tuyến tại A cắt nhau tại M

- a) Chứng minh bốn điểm O, A, M, C cùng thuộc một đường tròn.
- b) AC cắt OM tại H . Chứng minh AC vuông góc với OM và $OH \cdot OM = R^2$
- c) Tia BH cắt nửa đường tròn tại D . Chứng minh $\triangle ODM \sim \triangle OHD$
- d) Tia AD cắt MH tại I . Chứng minh I là trung điểm của MH



Bài 17. Vị trí tương đối của hai đường tròn.

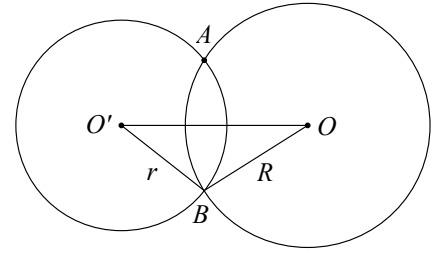
A. LÝ THUYẾT.

1) Hai đường tròn cắt nhau.

- ♣ Hai đường tròn có đúng hai điểm chung thì ta nói đó là Hai đường tròn cắt nhau. Hai điểm chung gọi là hai giao điểm của chúng

Hình 1: Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ cắt nhau khi

$$R - r < OO' < R + r.$$



Hình 1

2) Hai đường tròn tiếp xúc nhau.

- ♣ Hai đường tròn có duy nhất một điểm chung thì ta nói Hai đường tròn đó tiếp xúc nhau, điểm chung gọi là tiếp điểm của chúng.

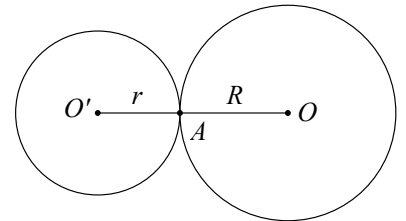
Hình 2: Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc ngoài tại A .

$$OO' = R + r$$

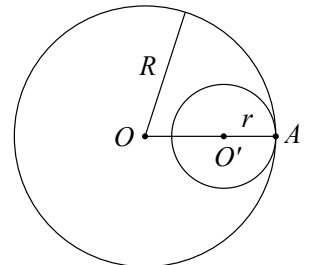
Hình 3: Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc trong tại A .

$$OO' = R - r.$$

Hai đường tròn tiếp xúc với nhau thì tiếp điểm thẳng hàng với hai tâm.



Hình 2



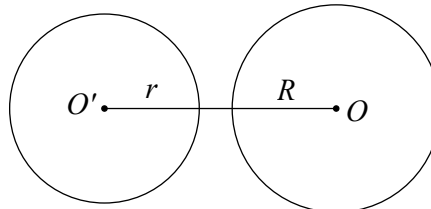
Hình 3

3) Hai đường tròn không giao nhau.

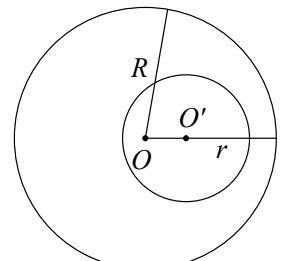
- ♣ Hai đường tròn không có điểm chung nào thì ta nói đó là hai đường tròn không giao nhau.

Hình 4: Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ ngoài nhau: $OO' > R + r$

Hình 5: Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ đựng nhau: $OO' < R - r$



Hình 4



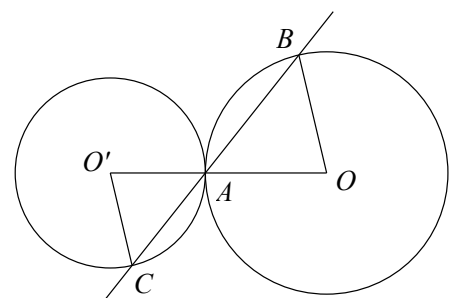
Hình 5

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1: Cho đoạn thẳng $OO' = 3 \text{ cm}$. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn $(O; 5 \text{ cm})$ và $(O'; 2 \text{ cm})$.

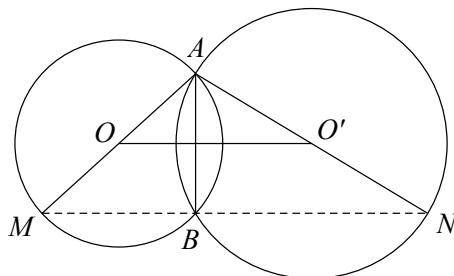
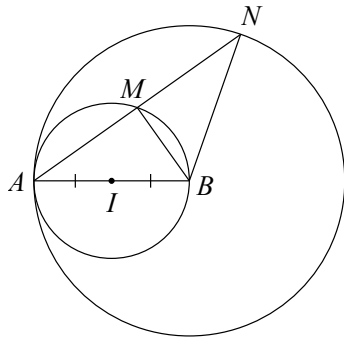
Bài 2: Cho hai điểm O và O' sao cho $OO' = 5 \text{ cm}$. Giải thích tại sao hai đường tròn $(O; 3 \text{ cm})$ và $(O'; 2 \text{ cm})$ tiếp xúc với nhau. Chúng tiếp xúc trong hay tiếp xúc ngoài?

Bài 3: Cho hai đường tròn (O) và đường tròn (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại A . Một đường thẳng qua A cắt (O) tại B và cắt (O') tại C . Chứng minh rằng $OB \parallel O'C$.



Bài 4: Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Vẽ hai đường tròn $(I; IA)$ và đường tròn $(B; BA)$

- Hai đường tròn (I) và (B) có vị trí như thế nào?
- Kẻ đường thẳng đi qua A , cắt (I) và (B) lần lượt tại M và N . So sánh AM và MN .

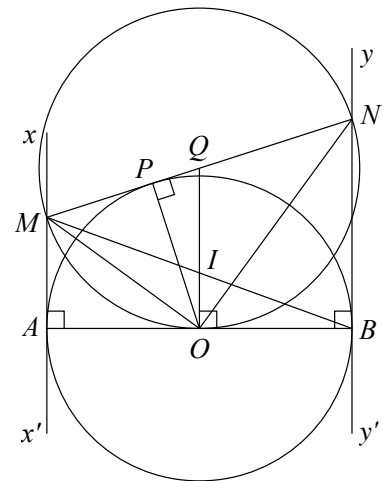
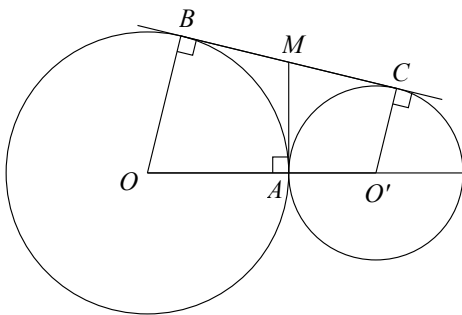


Bài 5: Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ cắt nhau tại A và B . Gọi M là điểm đối xứng với A qua O , N là điểm đối xứng với A qua O' .

- Chứng minh rằng $M \in (O)$ và $N \in (O')$ và ba điểm M, B, N thẳng hàng.
- Chứng minh rằng đường thẳng MN tiếp xúc với đường tròn đường kính AB .

Bài 6: Cho đường tròn (O) đường kính AB , tiếp tuyến xx' tại A và tiếp tuyến yy' tại B của (O) . Một tiếp tuyến thứ ba của (O) tại điểm P (P khác A và B) cắt xx' tại M và cắt yy' tại N .

- Chứng minh rằng $MN = MA + NB$
- Đường thẳng đi qua O và vuông góc với AB cắt MN tại Q . Chứng minh rằng Q là trung điểm của MN .
- Chứng minh rằng AB tiếp xúc với đường tròn đường kính MN .

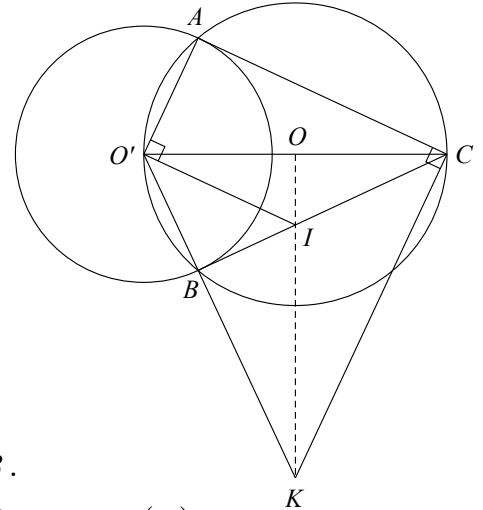
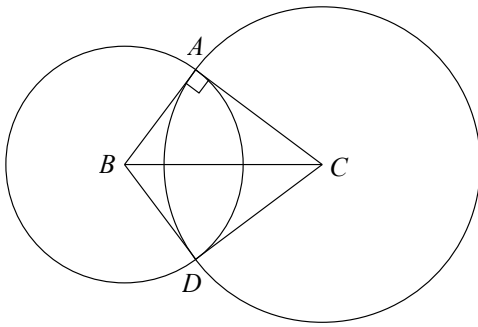


Bài 7: Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại A và cùng tiếp xúc với đường thẳng d tại B và C ($\text{khác } A$), trong đó $B \in (O)$ và $C \in (O')$. Tiếp tuyến của (O) tại A cắt BC tại M .

Chứng minh rằng:

- Đường thẳng MA tiếp xúc với (O')
- Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng BC từ đó suy ra $\triangle ABC$ vuông.

Bài 8: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , vẽ đường tròn $(B; BA)$ và đường tròn $(C; CA)$ chúng cắt nhau tại D (D khác A). Chứng minh rằng CD là tiếp tuyến của đường tròn (B) .



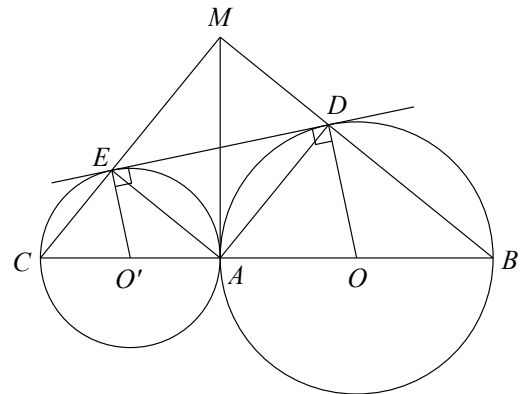
Bài 9: Cho đường tròn (O) và đường tròn (O') cắt nhau tại A và B .

Trong đó O' nằm trên đường tròn (O) . Kẻ đường kính $O'OC$ của đường tròn (O) .

- Chứng minh rằng CA, CB là hai tiếp tuyến của (O')
- Đường vuông góc với AO' tại O' cắt CB tại I , đường vuông góc với AC tại C cắt đường thẳng $O'B$ tại K . Chứng minh rằng O, I, K thẳng hàng.

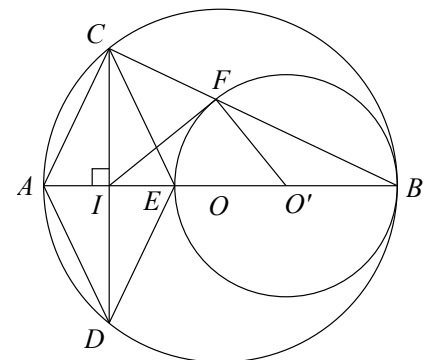
Bài 10: Cho đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A . Kẻ các đường kính AOB và $AO'C$. Gọi DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn với $D \in (O)$ và $E \in (O')$. Gọi M là giao điểm của BD và CE .

- Tính $\widehat{DAE}$.
- Tứ giác $ADME$ là hình gì?
- Chứng minh MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.



Bài 11: Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Trên OA lấy điểm E . Gọi I là trung điểm của AE , qua điểm I vẽ dây cung $CD \perp AB$, vẽ đường tròn (O') đường kính EB cắt BC tại F .

- Chứng minh (O) và (O') tiếp xúc tại B .
- Tứ giác $ACED$ là hình gì?
- Chứng minh IF là tiếp tuyến của (O')



Bài 12: Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Trên đường tròn này lấy điểm C sao cho $BC = R$. Từ B vẽ tiếp tuyến với đường tròn, tiếp tuyến này cắt đường thẳng AC tại D .

- Chứng minh $\triangle ABC$ vuông tại C .
- Tính AC, BD theo R .
- Vẽ đường tròn (O') đường kính BD . Chứng minh $O'C$ là tiếp tuyến của (O) và AB là tiếp tuyến của (O') .

